Versuch 2: Experimentelle Bestimmung Frequenzgang

1. Versuchsaufbau

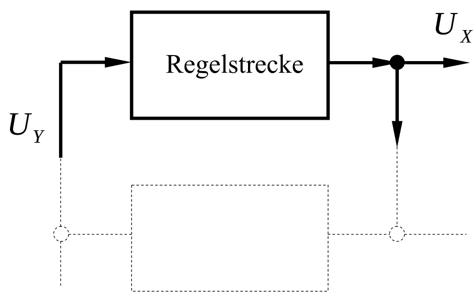
1.1. Umfang des Versuches

- Schwingungsfähige Regelstrecke mit I-Regler
- Aufzeichnung von Eingangs- und Ausgangsgröße bei verschiedenen Frequenzen
- Ermittlung der Stabilitätsgrenze für einen I-Regler
- Betriebsverhalten des Gesamtsystems bei einem Sollwertsprung

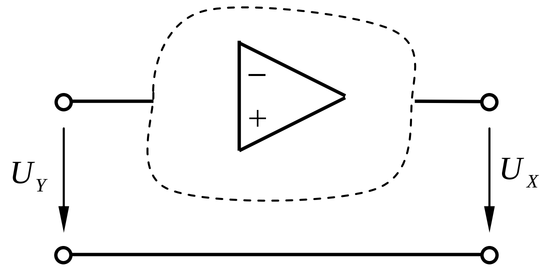
1.2. Versuchsaufbau

Vorbemerkung und Motivation:
Bei einem sogenannten einschleifigen Regelkreis wirkt auf die Regelstrecke eine Stellgröße. Die Regelstrecke kann in der Regel als ein Verzögerungsglied betrachtet werden. Als Ausgangsgröße bzw. Rückführgröße erhält man dann wieder eine Messgröße. Werden Eingangsgröße und Ausgangsgröße in der Signalform Spannung übertragen, kann die gesamte Anlage durch eine Operationsverstärkerschaltung abgebildet werden.

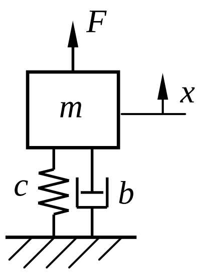
Reale Anlage:



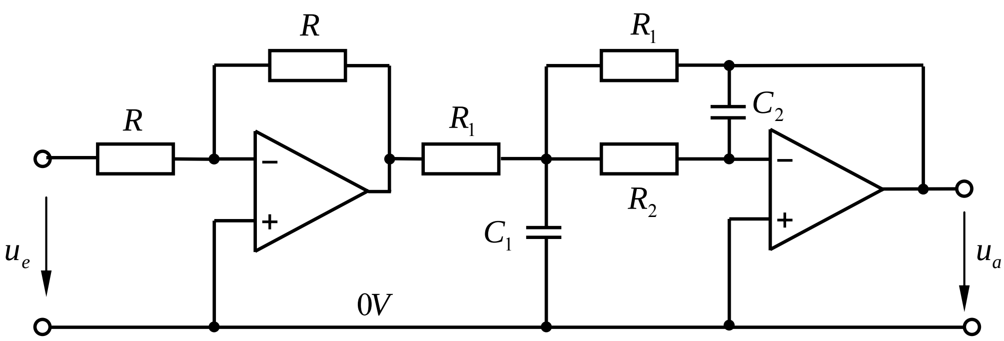
Schaltung mit gleichem Verhalten:



In Bezug auf die Durchflussregelung (Versuch 1) wurde die Charakteristik dann jedoch insoweit abgeändert, dass eine geringfügige Resonanzüberhöhung vorliegt. Mechanisch kann man sich das so vorstellen, als ob es sich bei der Eingangsgröße um eine Kraft handelt, mit der die Position eines Feder-Masse-Systems geregelt werden soll (Erdanziehung nicht betrachtet).



Schaltplan Regelstrecke:



Die Vorzeichenumkehr des zweiten Verstärkers wird durch die Invertierung des ersten Verstärkers aufgehoben. Die gesamte Schaltung (Regelstrecke) besitzt PT_2-Verhalten.

Berechnung:

$$G_S = \frac{\underline{u}_a}{\underline{u}_e} = \frac{K\omega_o^{\,2}}{\omega_o^{\,2} + 2\delta(j\omega) + (j\omega)^2} \qquad \text{wobei:} \quad K = 1 \qquad \omega_o^{\,2} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2} \qquad 2\delta = \frac{R_1 + 2R_2}{R_1C_1R_2}$$

Zahlenwerte: $R_1 = 200k\Omega;\ R_2 = 50k\Omega;\ C_1 = 20\mu F;\ C_2 = 0{,}6\mu F$

Für die spätere Rechnung sind vom Frequenzgang noch Betrag und Phasenwinkel zu bestimmen.

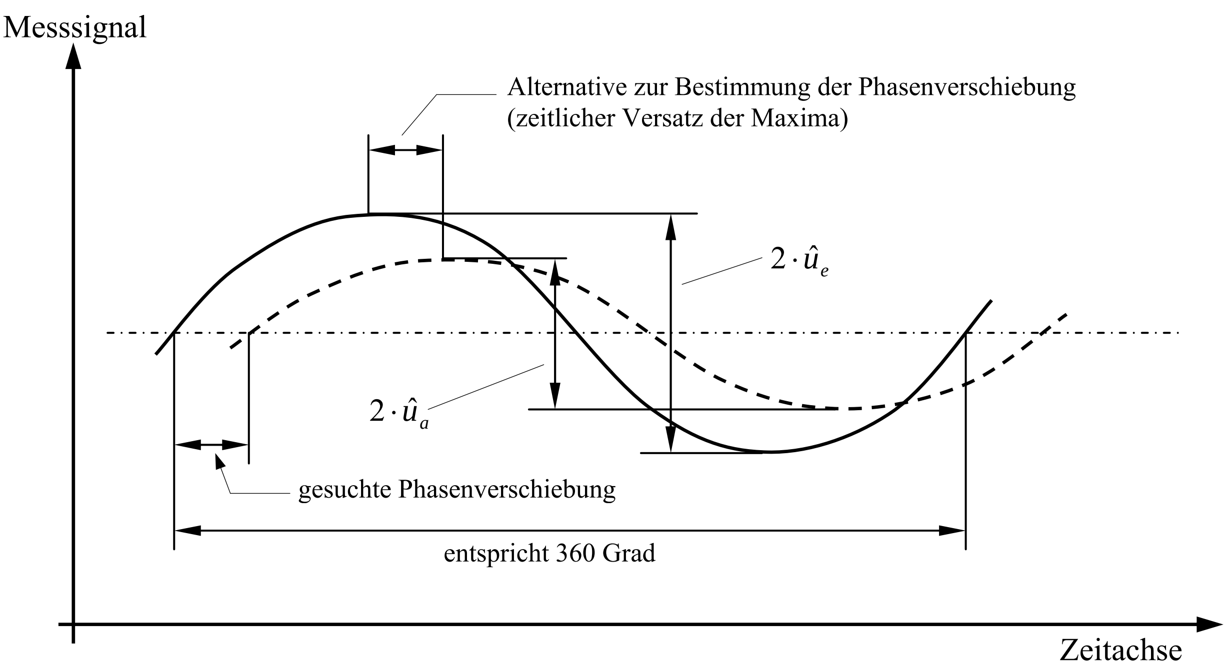
$$|G_S| = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = \frac{K\omega_o^{\,2}}{\sqrt{(\omega_o^{\,2} - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \qquad \tan(\varphi) = -\frac{2\delta\omega}{\omega_o^{\,2} - \omega^2}$$

Achtung:
Der Taschenrechner liefert beim „Arctan" jeweils die sogenannten Hauptwerte zwischen -90 Grad und +90 Grad. Dies ist kein Problem, so lange $\omega<\omega_o$ ist.

Ist jedoch $\omega>\omega_o$, müssen vom ermittelten Zahlenwert 180 Grad subtrahiert werden.

1.3. Experimentelle Bestimmung des Frequenzganges

Von einem Funktionsgenerator wird ein sinusförmiges Signal in die Regelstrecke eingespeist. Mit dem Linienschreiber werden Ausgangs- und Eingangsgröße zeitgleich aufgezeichnet.



Auswertung:
Anstatt der Bestimmung der Amplituden von Eingangs- und Ausgangsgröße ist es einfacher die Schwingweiten auszumessen und diese durcheinander zu dividieren.

$$|G_S| = \frac{2 \cdot \hat{u}_a}{2 \cdot \hat{u}_e} = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = \ldots$$

Zur Bestimmung der Phasenverschiebung wertet man die Verschiebung der Nullstellen (geht besser bei kleineren Frequenzen) oder die Verschiebung der Maxima aus (geht besser bei größeren Frequenzen). Dreisatz!
Beachten Sie, dass hier die Ausgangsgröße stets nacheilt. Dies bedeutet, die Winkel der Phasenverschiebungen müssen alle negativ sein.

2. Durchführung der Frequenzgangbestimmung

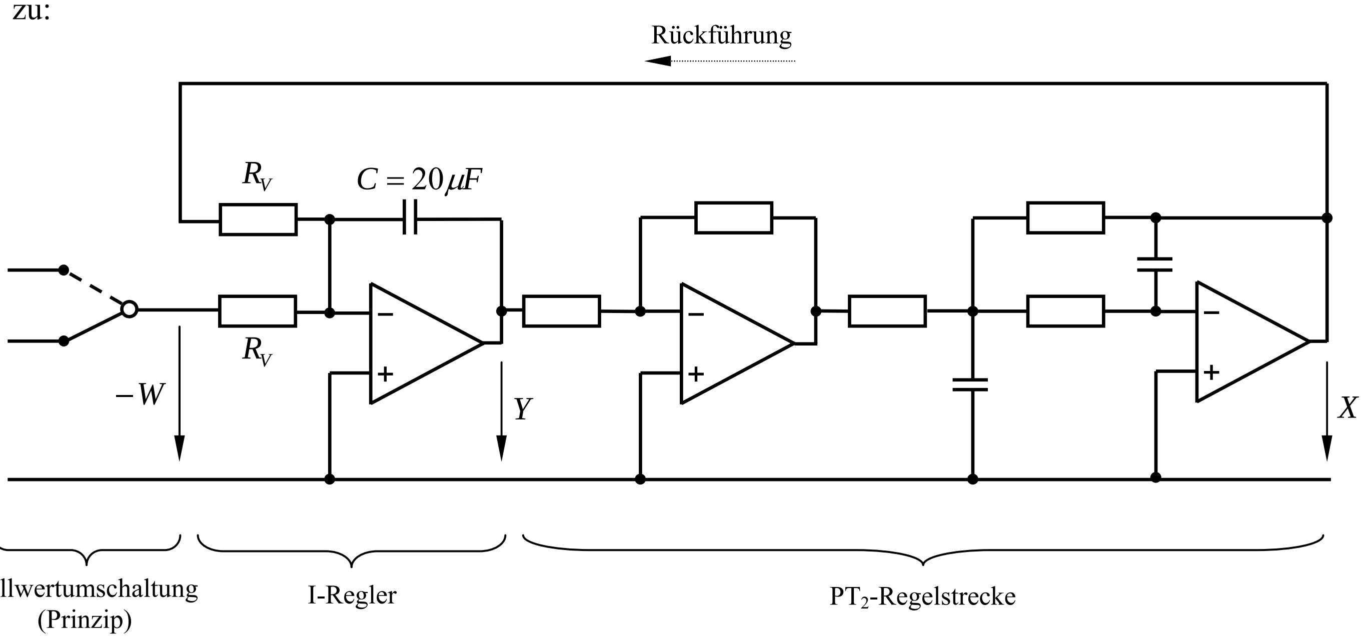
Folgende Aufgaben sind durchzuführen:

- Experimentelle und rechnerische Bestimmung des Frequenzganges.
- Speisen Sie dazu mit einem Funktionsgenerator ein sinusförmiges Signal in die Regelstrecke ein!
- Registrieren Sie Ein- und Ausgangssignal der Regelstrecke mit dem Linienschreiber.
- Auf dem letzten Blatt dieser Versuchsanleitung ist eine Wertetabelle vorbereitet. Ermitteln Sie aus dem Messschrieb die fehlenden Größen in dieser Wertetabelle!
- Zusätzlich sind die Werte rechnerisch (analytisch) zu ermitteln und in die Wertetabelle einzutragen.

Tragen Sie im Folgenden die ermittelten Werte (zeichnerische und rechnerische Ergebnisse mit unterschiedlichen Symbolen) in das Bode-Diagramm ein. Das Bode-Diagramm befindet sich ebenfalls auf dem letzten Blatt dieser Versuchsanleitung.

3. Auslegung eines I - Reglers

Als Regler soll ein I - Regler eingesetzt werden. Damit vervollständigt sich der gesamte Regelkreis zu:



Vorbemerkung: Der Frequenzgang des I-Reglers lautet $G_R = \frac{K_I}{j\omega}$. Dabei ist: $K_I = \frac{1}{T_I} = \frac{1}{R_V \cdot C}$

Aufgabe: Bestimmen Sie aus dem Bode-Diagramm die Reglereinstellung $K_{I\,krit}$ des I-Reglers an der Stabilitätsgrenze!

Dieser Teil kann ohne die entsprechenden Kenntnisse aus der Vorlesung nicht selbstständig gelöst werden. Trotzdem wird hier eine Kurzfassung der Vorgehensweise angegeben. Nach der ausführlichen Behandlung in der Vorlesung stellt diese Kurzfassung eine gute Möglichkeit dar, um die Vorgehensweise nochmals zu wiederholen.

Bei dem *Stabilitätskriterium nach Nyquist* ist die Stabilitätsgrenze genau dann erreicht, wenn bei der Kreisfrequenz (diese Kreisfrequenz wird hier ω_π genannt), bei der die Summe der Phasenverschiebungen von Strecke und Regler gerade -180 Grad beträgt (also: $\varphi_S + \varphi_R = -180$ Grad), der Betrag des offenen Regelkreises gerade den Wert Eins erreicht (also: $|G_o|=|G_S|\cdot|G_R|=1$).

Lösungsvariante 1 (ist ohne Kenntnis der Vorlesung nicht lösbar):

Da die Phasenverschiebung des I-Reglers stets -90 Grad beträgt, muss die Kreisfrequenz ω_π da liegen, wo die Phasenverschiebung der Regelstrecke ebenfalls -90 Grad beträgt. Hier geht man im Bode-Diagramm senkrecht nach oben und ermittelt den dazugehörigen Wert für den Betrag der Regelstrecke $|G_S|$. Aus der Bedingung $|G_o|=|G_S|\cdot|G_R|=1$ lässt sich $|G_R|$ bestimmen und zwar ist $|G_R|=1/|G_S|$. $|G_S|$ liegt ein bestimmtes Maß oberhalb der Linie $|G|=1$. Dieses Maß muss man von $|G|=1$ ausgehend nach unten abtragen. Dann findet man den Punkt, durch den die Kennlinie des I-Reglers durchgehen muss. Die Kennlinie des I-Reglers ist im Bode-Diagramm eine Gerade mit der Steigung "-1". Diese Gerade wird gezeichnet. An dem Schnittpunkt dieser Geraden mit $|G|=1$ kann man auf der Abszisse einen Wert für ω ablesen. Dieser Wert für ω ist $K_{I\,krit}$.

Lösungsvariante 2 (ist ohne Kenntnis der Vorlesung lösbar, obwohl man vielleicht noch nicht weiß, warum es so ist):

Da die Phasenverschiebung des I-Reglers stets -90 Grad beträgt, muss diese Kreisfrequenz ω_π da liegen, wo die Phasenverschiebung der Regelstrecke ebenfalls -90 Grad beträgt. Dies ist bei dem PT_2-Glied gerade ω_o (Nebenbemerkung: hier ist $\omega_\pi = \omega_o$).

$|G_S|$ kann man aus dem formelmäßig gegebenen Frequenzgang bestimmen.
Somit ergibt sich folgender Rechengang (Herleitung):

Setzt man in der Gleichung $|G_S| = \dfrac{K\omega_o^{\,2}}{\sqrt{(\omega_o^{\,2}-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}$ für $\omega=\omega_0$ sowie $K=1$,

so erhält man zunächst: $|G_S| = \dfrac{\omega_0}{2\delta}$

Aus $|G_0| = |G_S|\cdot|G_R| = 1$ sowie $|G_R| = \dfrac{K_I}{\omega}$ und $\omega=\omega_0$ folgt nach Auflösen nach K_I:

$K_I = K_{I\,krit} = \dfrac{\omega_0}{|G_S|}$ und letztlich $\boxed{K_{I\,krit} = 2\delta}$

Bemerkung zu den 2 Lösungsvarianten:
Die Lösungsvariante 2 ist im Endergebnis sehr einfach; funktioniert jedoch nur, weil die Regelstrecke "relativ einfach" formelmäßig beschreibbar ist. Demgegenüber ist Lösungsvariante 1 in jedem praktischen Fall anwendbar.

Im Folgenden sind nun die Widerstände R_v = 200; 100; 50; 20 $k\Omega$ gegeben. Mit der Kapazität des Kondensators C=20µF lassen sich die jeweiligen Verstärkungen ausrechnen. Dabei gilt:

$$K_I = \frac{1}{R_V \cdot C}$$

Für welche Widerstandswerte R_v ist der Regelkreis stabil/instabil?

Als Abschluss wird der Regelkreis "hardwaremäßig" komplettiert. Aufgezeichnet werden die Verläufe von Sollwert und Regelgröße (Sollwertsprung). War die Stabilitätsaussage richtig?

Wertetabelle zum Eintragen der Frequenzganganalyse:

f [Hz]	0,1	0,2	0,3	0,46	0,6	0,8	1,2
ω [s^{-1}]							
$\lvert G_S \rvert$ aus Messschrieb							
φ_S aus Messschrieb							
$\lvert G_S \rvert$ rechnerisch							
φ_S rechnerisch							

Bode-Diagramm zum Eintragen des Frequenzganges: