Hochschule Koblenz   Blatt 1 von 4

Fachbereich Ingenieurwesen

Fachrichtung Maschinenbau   SS 12

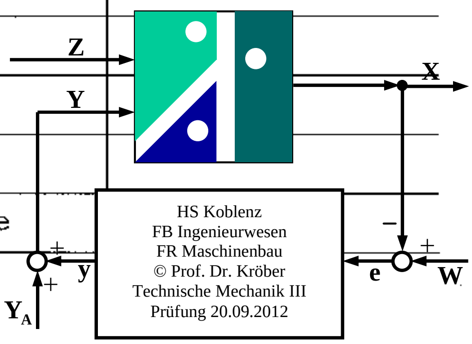
Name ______________________

Matr.-Nr. ______________________

Technische Mechanik III

Prof. Dr. W. Kröber

Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Summe	



Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsweg ersichtlich sein.

Bearbeitungszeit : 120 min

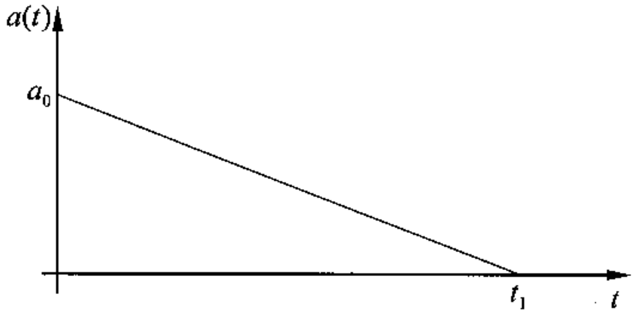
Note : ______________________

Erlaubte Hilfsmittel:

- Schreib- und Zeichengerät
- Taschenrechner
- Formelsammlung Technische Mechanik III (5 Blätter)
- Formelsammlungsblatt "Massenträgheitsmomente: ..."

Aufgabe 1 (10P)

Ein Massepunkt befindet sich zunächst in Ruhe. Dann wird er gemäß dem abgebildeten Bescheunigungsverlauf beschleunigt.



Geg.: a_0, t_1

Hilfestellung:

Geradengleichung (allgemein)

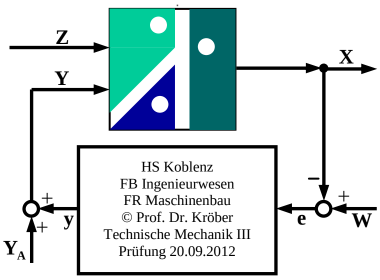
$$y = m \cdot x + b$$

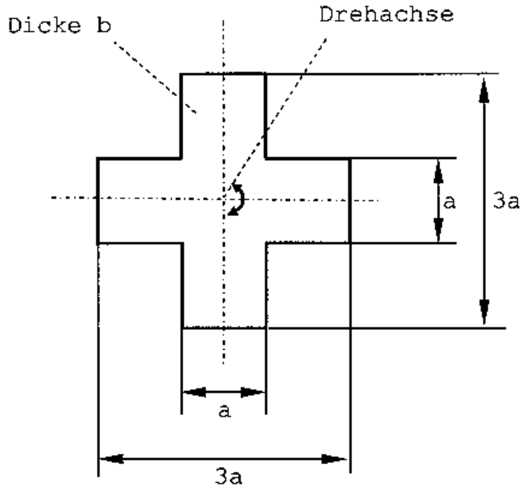
a. Welche Geschwindigkeit v_1 erreicht der Massepunkt nach der Zeit t_1?
   Ges.: v_1 in Abhängigkeit von a_0 und t_1

b. Wie groß ist der zurückgelegte Weg s_1 nach der Zeit t_1?
   Ges.: s_1 in Abhängigkeit von a_0 und t_1

Aufgabe 2 (15P)

Für das abgebildete Drehkreuz soll das Massenträgheitsmoment für die angegebene Drehachse bestimmt werden. Die Dichte ρ des Drehkreuzes ist konstant. Die Dicke b ist ebenfalls konstant.





a. Ermitteln Sie zunächst eine Gleichung zur Bestimmung des Massenträgheitsmomentes mit den Formelzeichen a, b und ρ!

   Antwortbeispiel: $J = \frac{8}{3} \cdot \rho \cdot b \cdot a^4$ (Bem.: Diese Formel ist nicht richtig!)

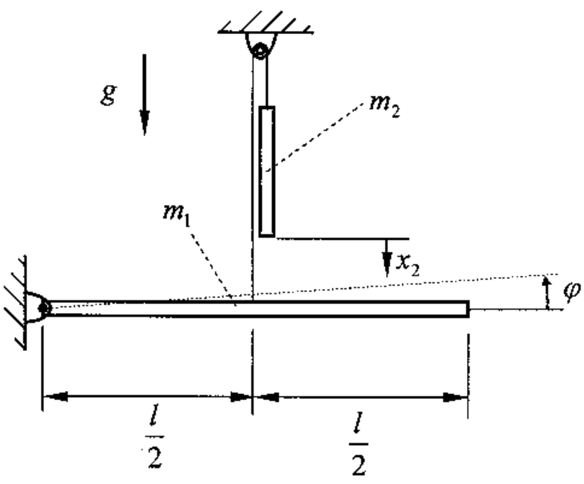
b. Ermitteln Sie daraus eine Gleichung, die die Masse des Drehkreuzes beinhaltet! Dabei ist m die Gesamtmasse der Körpers.

   Antwortbeispiel: $J = \frac{2}{3} \cdot m \cdot a^2$ (Bem.: Auch diese Formel ist nicht richtig!)

Aufgabe 3 (15P)

Der horizontal angeordnete dünne Stab der Masse m_1 ist über ein dehnstarres Seil über eine Umlenkrolle mit der Masse m_2 verbunden. Für die Lösung der Aufgabe soll angenommen werden, dass die Masse m_2 so groß ist, dass sie sich abwärts bewegt. Es kann von einer kleinen Winkelauslenkung φ ausgegangen werden.

Geg.: m_1, m_2, g, l



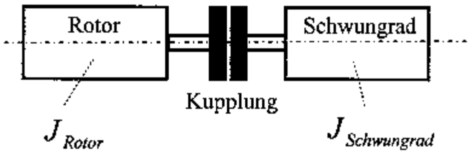
Bestimmen Sie die Beschleunigung $\ddot{x}_2$ und die Seilkraft in Abhängigkeit der gegebenen Größen.

Hinweis: Insbesondere das formelmäßige Ergebnis für die Seilkraft soll möglichst weitgehend vereinfacht werden.

Aufgabe 4 (15P)

Der Rotor einer Maschine muss von Zeit zu Zeit aus voller Drehzahl (Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_1$) auf Null abgebremst und danach wieder auf seine Ausgangsdrehzahl beschleunigt werden. Bei dieser Vorgehensweise wird bei jedem Abbremsen die zuvor vorhandene kinetische Energie des Rotors $E_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot J_{Rotor} \cdot \omega_1^2$ in Wärme umgewandelt und muss bei der anschließenden Beschleunigung wieder aufgebracht werden.

Zur Energieeinsparung soll die nebenstehende Versuchsanordnung aufgebaut werden. Dabei kann der Rotor wahlweise mit einer Schaltkupplung mit einem Schwungrad verbunden werden.



Bemerkung:
Während des gesamten Vorganges ist der Antrieb des Rotors abgeschaltet, d.h. es wird keine externe Energie zugeführt.

Nun zum Ablauf:

Phase 1:
Rotor dreht mit $\omega = \omega_1$, Kupplung geöffnet, Schwungrad steht still.

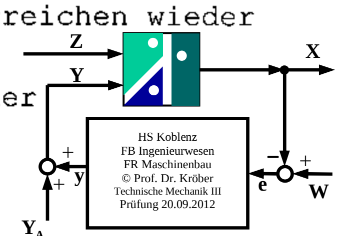
Phase 2:
Kupplung wird geschlossen, Rotor und Schwungrad erreichen eine neue Drehzahl.

a. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_2$ des eingekuppelten Gesamtsystems Rotor/Schwungrad!

Phase 3:
Kupplung wird geöffnet, Rotor wird bis zum Stillstand abgebremst, Schwungrad dreht weiter mit $\omega = \omega_2$.

Phase 4:
Kupplung wird wieder geschlossen, Rotor und Schwungrad erreichen wieder eine neue Drehzahl.

b. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_3$ des wieder eingekuppelten Gesamtsystems Rotor/Schwungrad!
   Ziel: $\omega_3 = f(\omega_1, J_{Rotor}, J_{Schwungrad})$



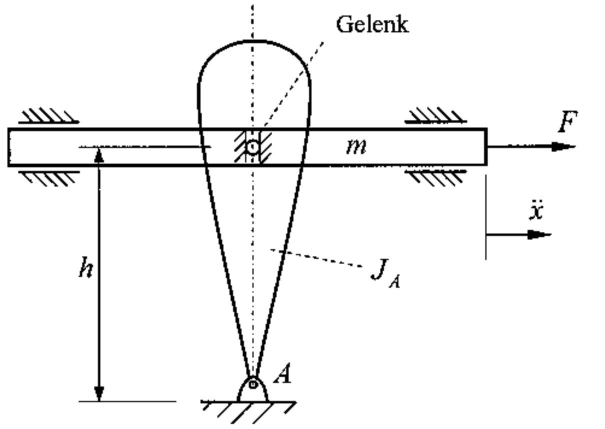
Folgendes ist für die Lösung der Aufgabe ohne Belang:
Phase 5: Die Kupplung wird jetzt wieder ausgekuppelt und anschließend wird der Rotor durch einen externen Motor wieder auf Enddrehzahl gebracht. Da nicht von der Drehzahl Null aus beschleunigt werden muss, ergibt sich dadurch eine Energieeinsparung.

Man kann nachweisen, dass die erzielbare Winkelgeschwindigkeit ω_3 dann maximal ist, wenn die Massenträgheitsmomente von Rotor und Schwungrad gleich groß sind.

c. Das Verhältnis $\frac{E_{Kin\ 3}}{E_{Kin\ 1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot J_{Rotor} \cdot \omega_3^2}{\frac{1}{2} \cdot J_{Rotor} \cdot \omega_1^2} = \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2$ gibt Aufschluss darüber wie viel Prozent der kinetischen Energie "gespeichert bzw. zurückgewonnen" werden kann.
Wie groß ist dieses Verhältnis (hierbei setzen: $J = J_{Rotor} = J_{Schwungrad}$)?

Aufgabe 5 (15P)

Die Masse m wird durch die angreifende Kraft nach rechts beschleunigt. Dabei wird das dazu senkrecht angeordnete Bauteil (Massenträgheitsmoment J_A) infolge der Kopplung über das Gelenk mit bewegt (kleine Auslenkungen).



Zwischen der Beschleunigung $\ddot{x}$ und der angreifenden Kraft F besteht folgender Zusammenhang:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m + m_{red}}$$

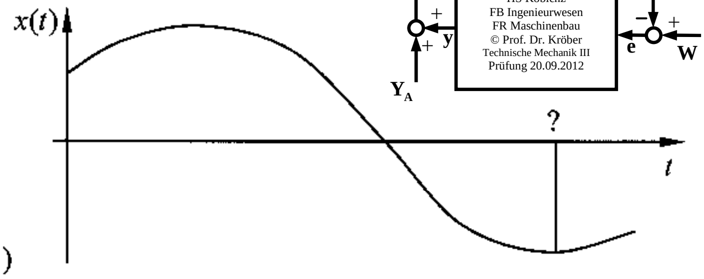
Geg.: m, J_A, h, F

a. Bestimmen Sie die in der Formel enthaltene Größe m_{red} in Abhängigkeit der gegebenen Größen!

b. Wie groß ist die Gelenkkraft in Abhängigkeit der gegebenen Größen?

Aufgabe 6 (15P)

Eine Schwingung startet mit der Anfangsauslenkung x_0 = 2 mm und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 20 mm/s. Die Schwingfrequenz beträgt $f = f_0$ = 2 Hz.



Hilfestellung:

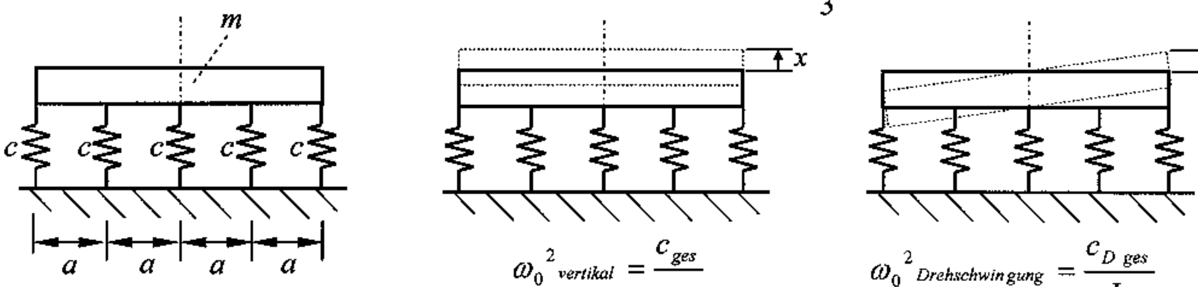
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t) + x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Nach welcher Zeit wird das Minimum der Schwingung erstmals erreicht?

Aufgabe 7 (15P)

Zur Schwingungsisolierung wird eine Maschinenplattform auf elastischen Elementen gelagert. Grundsätzlich kann das System vertikale Schwingungen und Drehschwingungen (kleine Auslenkungen) ausführen.

Geg.: c = 5000 N/m; a = 0,2 m; m = 18 kg; $J_S = \frac{4}{3} \cdot m \cdot a^2$ = 0,96 kgm²



$$\omega_0{}^2{}_{vertikal} = \frac{c_{ges}}{m} \qquad \omega_0{}^2{}_{Drehschwingung} = \frac{c_{D\,ges}}{J_S}$$

a. Bestimmen Sie zunächst formelmäßig und numerisch c_{ges} sowie $c_{D\,ges}$!

b. Für die reine Vertikalschwingung wird eine kinetische Energie von $E_{kin\,max}$ = 0,2 J zugrunde gelegt. Wie groß ist dann der maximale Schwingweg x?

c. Für die reine Drehschwingung wird ebenfalls eine kinetische Energie von $E_{kin\,max}$ = 0,2 J zugrunde gelegt. Wie groß ist dann die maximale Auslenkung x?

Lösungen Prüfung Technische Mechanik III 20.09.12

zu 1, a) $a = a(t) = a_0 - \frac{a_0}{t_1} \cdot t$ (Bem.: Steigung $m = -a_0/t_1$)

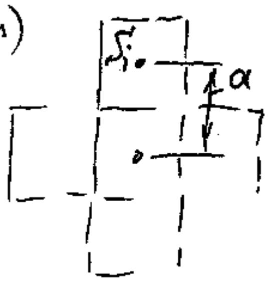
$$v = a_0 \cdot t - \frac{1}{2} \frac{a_0}{t_1} t^2 + \underbrace{\cancel{C_1}}_{=0}$$

$$v(t=t_1) = \underline{\underline{v_1}} = a_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \frac{a_0}{t_1} t_1^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} a_0 \cdot t_1}}$$

b) $s = \frac{1}{2} a_0 t^2 - \frac{1}{6} \frac{a_0}{t_1} t^3 + \cancel{C_2}^{=0}$

$$s(t=t_1) = \underline{\underline{s_1}} = \frac{1}{2} a_0 t_1^2 - \frac{1}{6} \frac{a_0}{t_1} t_1^3 = \underline{\underline{\frac{1}{3} a_0 \cdot t_1^2}}$$

zu 2, a)



„Steiner“

$$J = \frac{1}{12} \underbrace{a^2 \cdot b \cdot \rho}_{m_i} (a^2 + a^2) + 4 \left[\frac{1}{12} \underbrace{a^2 b \rho}_{m_i} (a^2 + a^2) + \underbrace{a^2 b \rho}_{m_i} \cdot a^2 \right]$$

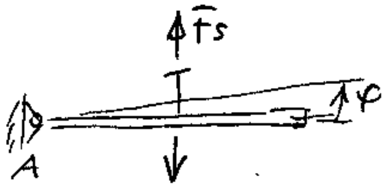
$$= a^2 b \rho \left[\frac{2}{12} a^2 + 4 \frac{2}{12} a^2 + 4 a^2 \right] = a^2 b \rho a^2 \left[\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + 4 \right]$$

$$\underline{\underline{J = \frac{29}{6} \rho b a^4}}$$

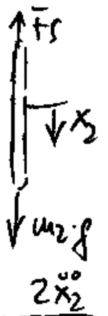
b) $m = m_{ges} = a^2 b \cdot \rho \cdot 5$

$$\underline{\underline{J}} = \frac{29}{6} \underbrace{\rho \cdot b \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot \frac{5}{5}}_{=m} = \frac{29}{6 \cdot 5} m a^2 = \underline{\underline{\frac{29}{30} m a^2}}$$

zu 3)



$$J_A \cdot \ddot{\varphi} = F_S \cdot \frac{l}{2} - m_1 g \cdot \frac{l}{2} \; ; \; J_A = \frac{1}{3} m_1 l^2$$



$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 \cdot g - F_S \quad ; \quad \ddot{x}_2 = \ddot{\varphi} \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{2 \ddot{x}_2}{l}$$

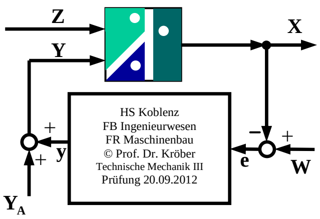
$$F_S = m_2 \cdot g - m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{1}{3} m_1 \cancel{l^2} \cdot \frac{2 \ddot{x}_2}{\cancel{l}} = (m_2 \cdot g - m_2 \ddot{x}_2) \frac{l}{2} - m_1 g \frac{l}{2}$$

$$\ddot{x}_2 \left(\frac{2}{3} m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) = \frac{1}{2} (m_2 - m_1) \cdot g \; | \cdot 2$$

$$\underline{\underline{\ddot{x}_2 = \frac{m_2 - m_1}{\frac{4}{3} m_1 + m_2} g}}$$

Lösungen Prüfung Technische Mechanik III 20.09.12



auch zu 3)

$$F_S = m_2 \cdot g - m_2 \ddot{x}_2 ; \quad \ddot{x}_2 = \frac{m_2 - m_1}{\frac{4}{3} m_1 + m_2} \cdot g$$

$$= m_2 \cdot g \cdot \frac{\frac{4}{3} m_1 + m_2}{\frac{4}{3} m_1 + m_2} - m_2 \frac{m_2 - m_1}{\frac{4}{3} m_1 + m_2} \cdot g = \frac{\left(\frac{4}{3} m_1 + \cancel{m_2} - \cancel{m_2} + m_1\right) m_2 \cdot g}{\frac{4}{3} m_1 + m_2}$$

$$= \frac{\frac{7}{3} m_1 m_2 g}{\frac{4}{3} m_1 + m_2} \cdot \frac{3}{3} = \underline{\underline{\frac{7 m_1 m_2 \cdot g}{4 m_1 + 3 m_2}}}$$

zu 4, a) $L_{vorher} = L_{nachher}$

$$J_{Rot} \cdot \omega_1 = (J_{Rot} + J_{Schw}) \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \underline{\underline{\frac{J_{Rot}}{J_{Rot} + J_{Schw}} \omega_1}}$$

b) $L_{vorher} = L_{nachher}$

$$J_{Schw} \cdot \omega_2 = (J_{Rot} + J_{Schw}) \cdot \omega_3$$

$$\omega_3 = \frac{J_{Schw}}{J_{Rot} + J_{Schw}} \cdot \omega_2 = \frac{J_{Schw}}{J_{Rot} + J_{Schw}} \cdot \frac{J_{Rot}}{J_{Rot} + J_{Schw}} \cdot \omega_1$$

$$\omega_3 = \underline{\underline{\frac{J_{Rot} \cdot J_{Schw}}{(J_{Rot} + J_{Schw})^2} \omega_1}}$$

c) $$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{J_{Rot} \cdot J_{Schw}}{(J_{Rot} + J_{Schw})^2} = \frac{J^2}{(J+J)^2} = \frac{1}{4} ; \quad \underline{\underline{\frac{E_{kin3}}{E_{kin1}}}} = \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$$

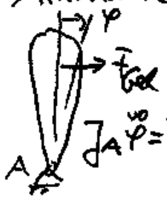
zu 5, a) $$\frac{1}{2} J_A \omega^2 = \frac{1}{2} m_{red} \cdot \dot{x}^2 \Rightarrow \underline{\underline{m_{red}}} = J_A \left(\frac{\omega}{\dot{x}}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{J_A}{h^2}}}$$

$$\dot{x} = \omega \cdot h \Rightarrow \frac{\omega}{\dot{x}} = \frac{1}{h}$$

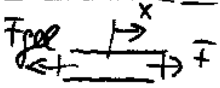
b) $$F_{Gelenk} = m_{red} \cdot \ddot{x} = m_{red} \frac{F}{m + m_{red}} = \frac{J_A}{h^2} \cdot \frac{F}{m + \frac{J_A}{h^2}} \cdot \frac{h^2}{h^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{J_A}{J_A + m \cdot h^2} \cdot F}}$$

Alternative



$$J_A \ddot{\varphi} = F_{Gel} \cdot h$$



$$m \cdot \ddot{x} = F - F_{Gel}$$

ferner:

$$\ddot{x} = h \cdot \ddot{\varphi}$$

Lösungen Prüfung Technische Mechanik III 20.09.12

zu 6) $x = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x_0\cos\omega_0 t$

$\dot{x} = \frac{v_0}{\cancel{\omega_0}}\cancel{\omega_0}\cos\omega_0 t - x_0\omega_0\sin\omega_0 t \overset{!}{=} 0$ (Extremwerte)

$$v_0\cos\omega_0 t = x_0\omega_0\sin\omega_0 t$$

$$\frac{v_0}{x_0\cdot\omega_0} = \frac{\sin\omega_0 t}{\cos\omega_0 t} = \tan\omega_0 t$$

$$t = \frac{1}{\omega_0}\arctan\frac{v_0}{x_0\cdot\omega_0} = \frac{1}{2\pi\cdot 2s^{-1}}\underbrace{\arctan\frac{20\,\frac{mm}{s}}{2mm\cdot 2\cdot\pi\cdot 2\,\frac{1}{s}}}_{38,5119°}$$

$$= \frac{1}{2\pi\cdot 2s^{-1}}\cdot 38{,}5119°\,\frac{\pi}{180°} = 0{,}0535\,s$$

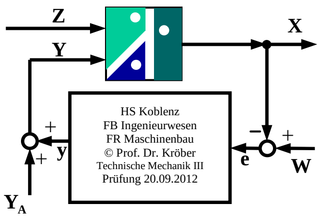
Dies ist der Zeitpunkt für das (erste) Maximum, $\frac{T_0}{2}$ addieren
Z Methode „scharfes Hinsehen" ← Skizze in Aufgabenstellung

also: $\underline{\underline{t}} = 0{,}0535\,s + \frac{T_0}{2} = 0{,}0535\,s + \frac{1}{2 f_0} = 0{,}0535\,s + \frac{1}{2\cdot 2}\,s = \underline{\underline{0{,}3035\,s}}$

zu 7,a) $\underline{\underline{c_{ges}}} = 5c = 5\cdot 5000\,\frac{N}{m} = \underline{\underline{25000\,N/m}}$

$$c_{Dges} = \sum c_i a_i^2 = (c\cdot a^2 + c(2a)^2)\cdot 2 = 10\cdot c a^2$$

$$\underline{\underline{}} = 10\cdot 5000\cdot 0{,}2^2\,\frac{Nm}{rad} = \underline{\underline{2000\,\frac{Nm}{rad}}}$$



b) $E_{kin} = E_{Pot} = \frac{1}{2} c_{ges}\cdot\hat{x}^2$

$$\underline{\underline{\hat{x}}} = \sqrt{\frac{2\cdot E_{kin}}{c_{ges}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}2}{25000}}\,m = \underline{\underline{4{,}0\,mm}}$$

c) $E_{kin} = E_{Pot} = \frac{1}{2} c_{Dges}\cdot\hat{\varphi}^2$

$$\hat{\varphi} = \sqrt{\frac{2\cdot E_{kin}}{c_{Dges}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}2}{2000}}\,rad = 0{,}0141\,rad$$

$$\underline{\underline{\hat{x}}} = \hat{\varphi}\cdot 2\cdot a = 0{,}0141\cdot 2\cdot 200\,mm = \underline{\underline{5{,}657\,mm}}$$