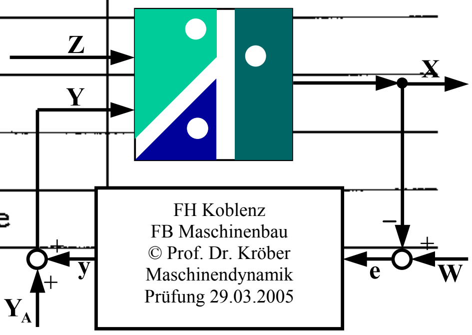
Fachhochschule Koblenz
Fachbereich Maschinenbau
Maschinendynamik WS 04/05
Prof. Dr. W. Kröber

Name ____________________

Matr.-Nr. ____________________

Aufgabe	erreichte Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Summe	

+Lösungen

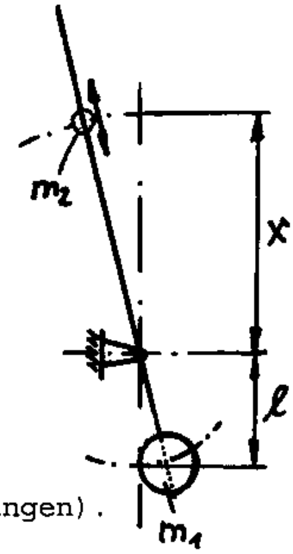


Zur Bewertung der Aufgaben muss der gesamte Lösungsteil ersichtlich sein.

- Bearbeitungszeit : 90 min
- Erlaubte Hilfsmittel :
  - Schreib- und Zeichengerät
  - Taschenrechner
  - Formelsammlung (11 Blätter)
  - aus der Technischen Mechanik:
    - Flächen- und Widerstandsmomente für die Biegung
    - Durchbiegungen und Neigungswinkel
    - Massenträgheitsmomente homogener Körper

Note : ____________________

Aufgabe 1 (20P)



Im Jahr 1816 erfand Mälzel ein Metronom, mit dem die Schlagzahlen pro Minute eingestellt werden konnten. Seit dieser Zeit wird es zur Tempoangabe in der Musik verwendet. Dabei werden Schlagzahlen (Schwingzahlen) von 40-208 Schlägen pro Minute realisiert.

Schwingungstechnisch handelt es sich um ein Pendel mit einer vergleichsweisen großen Masse m_1 und einer kleineren Masse m_2. Durch Verschieben der kleineren Masse m_2 kann die Schwingfrequenz variiert werden.

a. Weisen Sie nach, dass die Schwingfrequenz n_0 [1/min] mit der folgenden Formel berechnet werden kann!
   Annahmen: Die Massen m_1 und m_2 seien Punktmassen, das Gestänge sei masselos (kleine Auslenkungen).

$$n_o = \frac{30}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{1 - \frac{m_2}{m_1} \cdot \left(\frac{x}{l}\right)}{1 + \frac{m_2}{m_1} \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^2}}$$

b. Bei der größten einstellbaren Schlagzahl wird die kleine Masse nahezu in die Drehachse geschoben (x=0). Bestimmen Sie die Länge l, um diese Schlagzahl zu realisieren (sei: $g = 9{,}81\ m/s^2$)!

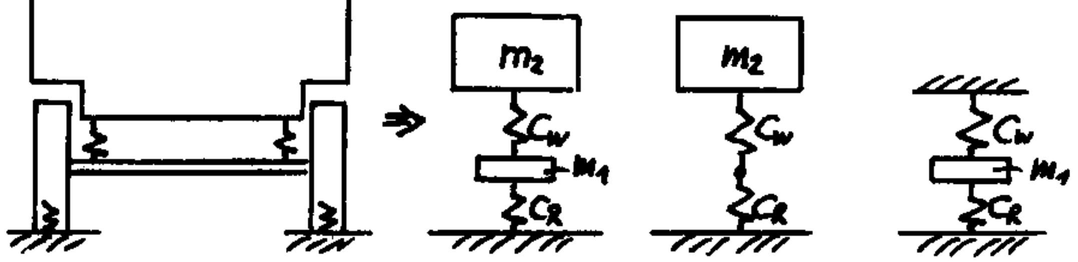
c. Ermitteln Sie nun die kleinstmögliche einstellbare Schlagzahl! Hierbei sei:

$$\frac{m_2}{m_1} = 0{,}21 \qquad \frac{x}{l} = 4$$

Aufgabe 2 (18 P)

Die Abbildung zeigt das schwingungstechnische Ersatzsystem eines Fahrzeugoberbaus mit einer Radachse. Für die Betrachtung der vertikalen Schwingungen handelt es sich um einen Zweimassenschwinger.
geg.: m_1=80 kg, m_2=920 kg, c_R=2000 KN/m, c_w=300 KN/m

Aufgabenteil a | Aufgabenteil b | Aufgabenteil c



a. Bestimmen Sie die beiden Eigenfrequenzen!

b. Bestimmen Sie die Eigenfrequenz, als ob die Masse der Radachse vernachlässigt werden kann (Dann handelt es sich um einen Schwinger mit einem Freiheitsgrad)!

c. Bestimmen Sie die Eigenfrequenz, als ob die Masse des Fahrzeugoberbaus so groß ist, dass nur die Radachse Schwingungen ausführt (Dann handelt es sich auch um einen Schwinger mit einem Freiheitsgrad)!

d. Können Sie die zahlenmäßigen Ergebnisse von b. und c. im Vergleich zu a. interpretieren?

Aufgabe 3 (18 P)

Der Rotor (Drehzahl 1450 1/min) einer Maschine besitzt eine Unwucht von $\Delta m \cdot e = 0{,}12\ kg \cdot m$. Die Maschine hat ein Gesamtgewicht von 120 kg und ist mit Gummifederelementen elastisch gegenüber der Umgebung abgefedert. Durch das Eigengewicht ergibt sich eine statische Einsenkung von 5,0 mm ($g=9{,}81\ m/s^2$). Die Dämpfung der Gummifederelemente wird vernachlässigt.

Annahme: Schwingsystem mit einem Freiheitsgrad (vertikal)

Zu bestimmen sind:
Eigenfrequenz [Hz], Schwingamplitude [mm], Fliehkraft [N] und die (dynamische) Kraft [N] auf die Umgebung.

Aufgabe 4 (18 P)

Ein Schwingungssystem ($\vartheta = 0{,}1$) besitzt zum Zeitpunkt t=0 eine Anfangsauslenkung von x_0=+2,5 mm und eine Anfangsgeschwindigkeit von v_0=+3 mm/s. Ferner sei ω_0=4 s^{-1}. Nach welcher Zeit ist der Schwingweg zum ersten Mal gleich Null?
Hilfestellung:

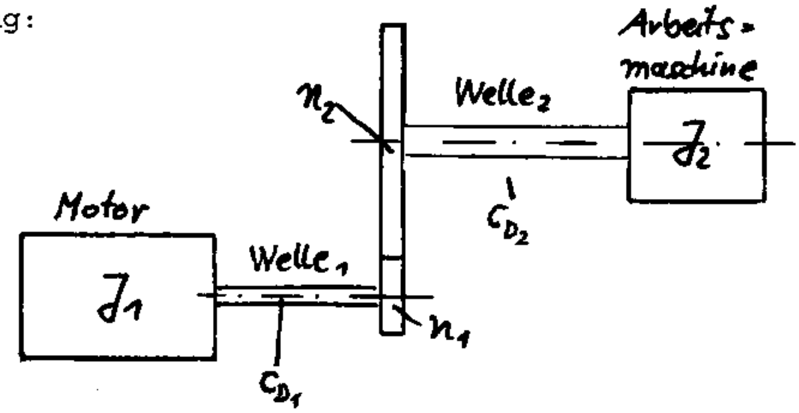
$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t)) = e^{-\delta t} \cdot (\frac{v_0 + \delta\, x_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + x_0 \cos(\omega_d t))$$

Aufgabe 5 (16 P)

Die Abbildung zeigt einen Antriebsstrang mit Motor, Getriebe (Übersetzungsverhältnis n_2/n_1) und Arbeitsmaschine. Die Massenwirkung des Getriebes ist vernachlässigbar. Bestimmen Sie eine Formel zur Bestimmung der Torsionseigenfrequenz!

Gesuchte formelmäßige Lösung:

$$f_0 = f(J_1, c_{D_1}, J_2, c_{D_2}, \frac{n_2}{n_1})$$



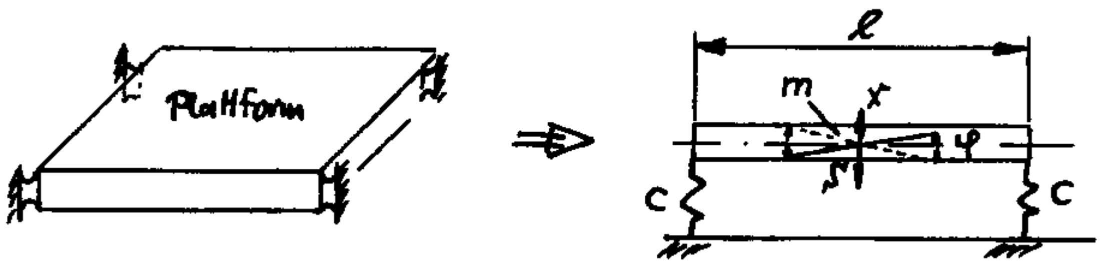
Hinweis:
Wenn (z.B.) die Welle 2 auf die Welle 1 reduziert wird, dann bilden die beiden Drehfedern eine Reihenschaltung, also:

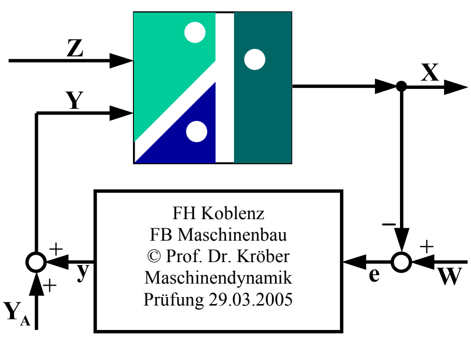
$$c_{D_{ges}} = \frac{c_{D_1} \cdot c_{D_{2red}}}{c_{D_1} + c_{D_{2red}}}$$

Aufgabe 6 (10 P)

Die skizzierte Plattform dient als Grundplatte zur späteren Montage eines Motorprüfstandes. Schwingungstechnisch kann dieses System wie abgebildet dargestellt werden. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen f_0 der Plattform (Masse m, Länge l >> Höhe) für vertikale Schwingungen und für Drehschwingungen um den Schwerpunkt!

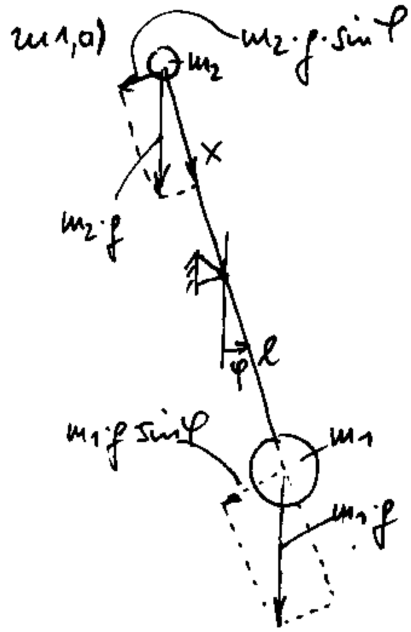
Geg.: c, m, l





Lösungen Maschinendynamik vom 29.03.05 Blatt 1

m1,a)



$$J\ddot{\varphi} = \sum M$$

$$J\ddot{\varphi} = -m_1 \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot l + m_2 \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot x \; ; \; \sin\varphi \approx \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \varphi \underbrace{\frac{m_1 \cdot g \cdot l - m_2 \cdot g \cdot x}{J}}_{\omega_0^2} = 0$$

ferner:

$$J = m_1 l^2 + m_2 \cdot x^2$$

Mit $\omega_0 = \frac{\pi \cdot n_0}{30}$ ergibt sich ... $\underline{\underline{n_0 = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l} \cdot \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}\frac{x}{l}}{1 + \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{x}{l}\right)^2}}}}$

b) $x = 0$: $n_0 = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \rightarrow \underline{\underline{l}} = g\left(\frac{30}{\pi \cdot n_0}\right)^2 = 9{,}81\left(\frac{30}{\pi \cdot 208}\right)^2 m = \underline{\underline{20{,}68\,mm}}$

c) $\underline{\underline{n_0}} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}02068} \cdot \frac{1 - 0{,}21 \cdot 4}{1 + 0{,}21 \cdot 4^2}} \; \frac{1}{min} = \underline{\underline{39{,}84 \frac{1}{min}}}$ ($\approx$ 40 Schläge pro Minute)

m2,a) $\omega_{0_{1,2}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_R + c_W}{m_1} + \frac{c_W}{m_2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_R + c_W}{m_1} + \frac{c_W}{m_2}\right)^2 - \frac{c_R \cdot c_W}{m_1 m_2}}$

$$\frac{c_R + c_W}{m_1} + \frac{c_W}{m_1} = \left(\frac{2000 + 300}{80} + \frac{300}{920}\right) \cdot 1000\,s^{-2} = 29076{,}1\,s^{-2}$$

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Bem.: hier mit „viel Nachkommastellen" rechnen!

$$\frac{c_R \cdot c_W}{m_1 m_2} = \ldots = 8{,}1522 \cdot 10^6\,s^{-4}$$

$$\omega_{0_{1,2}}^2 = \left(\frac{29076{,}1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{29076{,}1}{2}\right)^2 - 8{,}152 \cdot 10^6}\right) s^{-2}$$

$\rightarrow \omega_{01} = \ldots = 169{,}68\,s^{-1}$; $f_{01} = 27{,}01\,Hz$

$\rightarrow \omega_{02} = 16{,}83\,s^{-1}$; $f_{02} = 2{,}68\,Hz$

b) $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_{ges}}{m}}$; $m = m_2$; $c_{ges} = \frac{c_R \cdot c_W}{c_R + c_W} = \ldots = 260{,}87 \frac{kN}{m}$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{260{,}87 \cdot 1000}{920}}\,Hz = 2{,}68\,Hz$$

c) $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_{ges}}{m}}$; $m = m_1$; $c_{ges} = c_R + c_W = \ldots = 2300 \frac{kN}{m}$

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi}\sqrt{\frac{2300 \cdot 1000}{80}}\,Hz = 26{,}99\,Hz$$

d) Lösungen aus b) und c) sind gute Näherungen für a)

Bem.: c_R beinhaltet bereits die Parallelschaltung der beiden Reifen, ebenso gilt dies für c_W

Lösungen Maschinendynamik vom 29.03.05 Blatt 2

zu 3)

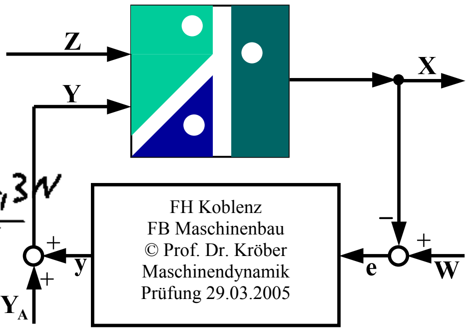
$$\underline{\underline{f_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_{stat}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\,m/s^2}{0{,}005\,m}} = \underline{\underline{7{,}05\,Hz}}$$

$$\eta = \frac{f}{f_0} = \frac{n/60}{f_0} = \frac{1450/60}{7{,}05} = 3{,}428$$

$$\underline{\underline{\hat{x}}} = \frac{\Delta m \cdot e}{m} \cdot \underbrace{\frac{\eta^2}{\eta^2-1}}_{\text{Bem.: } V_3} = \underbrace{\frac{0{,}12}{120}}_{\hat{=}\,1\,mm} \cdot \frac{3{,}428^2}{3{,}428^2-1}\,m = \underline{\underline{1{,}093\,mm}}$$

$$\underline{\underline{\hat{F}}} = m e \omega^2 = 0{,}12 \left(\frac{\pi \cdot 1450}{30}\right)^2 N = \underline{\underline{2766{,}8\,N}}$$

$$\underline{\underline{\hat{F}_u}} = \underbrace{\frac{1}{\eta^2-1}}_{\text{Bem.: } V_2 = V_0} \cdot \hat{F} = \frac{1}{3{,}428^2-1} \cdot 2766{,}8\,N = \underline{\underline{257{,}3\,N}}$$



zu 4.)

$$\vartheta = \delta/\omega_0 \Rightarrow \delta = \vartheta\,\omega_0 = 0{,}1 \cdot 4\,s^{-1} = 0{,}4\,s^{-1}$$

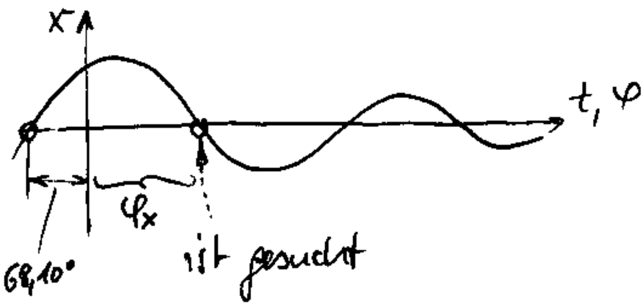
$$\omega_0^2 = \omega_d^2 + \delta^2 \Rightarrow \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{4^2 - 0{,}4^2}\,s^{-1} = 3{,}980\,s^{-1}$$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\delta t}}_{\neq 0} \underbrace{\left[\frac{v_0 + \delta \cdot x_0}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d t) + x_0 \cdot \cos(\omega_d t)\right]}_{=0} = 0$$

$$\frac{v_0 + \delta \cdot x_0}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d t) = -x_0 \cdot \cos(\omega_d t)$$

$$\tan(\underbrace{\omega_d t}_{\varphi}) = \frac{\sin(\omega_d t)}{\cos(\omega_d t)} = -\frac{x_0 \cdot \omega_d}{v_0 + \delta \cdot x_0} = -\frac{0{,}0025 \cdot 3{,}980}{0{,}003 + 0{,}4 \cdot 0{,}0025} = -2{,}4875$$

$\Rightarrow \varphi = -68{,}10°$ (ist der sogenannte Hauptwert)



$$\varphi_x = 180° - 68{,}10° = 111{,}90°$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{3{,}980}\,s = 1{,}579\,s$$

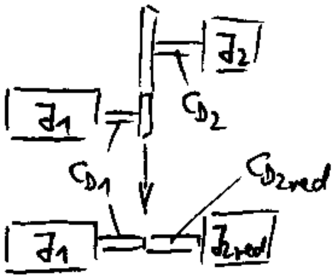
Dreisatz:

$$\frac{\varphi_x}{360°} = \frac{t_x}{T_d} \Rightarrow t_x = 1{,}579\,s \cdot \frac{111{,}90°}{360°}$$

$$\underline{\underline{t_x = 0{,}491}}$$

Lösungen Maschinendynamik vom 29.03.05 Blatt 3

zu 5)



$$E_{kin} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_{2red} \cdot \omega_1^2 \Rightarrow J_{2red} = J_2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 ; \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} C_{D2} \varphi_2^2 = \frac{1}{2} C_{D2red} \cdot \varphi_1^2 \Rightarrow C_{D2red} = C_{D2} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 ; \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$J_{ges} = \frac{J_1 \cdot J_{2red}}{J_1 + J_{2red}} \quad ; \quad C_{Dges} = \frac{C_{D1} \cdot C_{D2red}}{C_{D1} + C_{D2red}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_{Dges}}{J_{ges}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_{D1} \cdot C_{D2red} \, (J_1 + J_{2red})}{(C_{D1} + C_{D2red}) \, J_1 \cdot J_{2red}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_{D1} \cdot C_{D2} \cancel{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{C_{D1} + C_{D2} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \cdot \frac{J_1 + J_2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{J_1 \cdot J_2 \cancel{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_{D1} \cdot C_{D2}}{J_1 \cdot J_2} \cdot \frac{J_1 + J_2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{C_{D1} + C_{D2} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

zu 6) Vorbem.: Schwingungen sind entkoppelt

Bem.: c beinhaltet bereits die Parallelschaltung der Gummifederelemente ($c = 2 \cdot c_{Gummifederelemente}$)

vertikal $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{ges}}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \cdot c}{m}}$

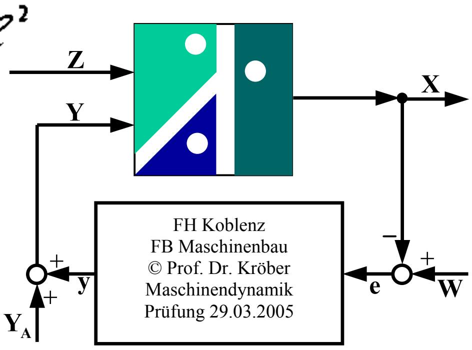
Drehschwingung

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{ges}}{J}} \quad ; \quad c_{ges} = 2 \cdot c \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} c \cdot \ell^2$$

↑ Parallelschaltung

$$J = J_S = \frac{1}{12} m \ell^2$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} c \ell^2}{\frac{1}{12} m \ell^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6c}{m}}$$



Lösung weniger Stud. (Formelsammlung S. 11):

$$\omega_{0_{1/2}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c+c}{m} + \frac{c\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + c\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{\frac{1}{12} m \ell^2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c+c}{m} + \frac{c\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + c\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{\frac{1}{12} m \ell^2} \right)^2 - \frac{c \cdot c \, \ell^2}{m \frac{1}{12} m \ell^2}}$$

$$= \ldots = \frac{4c}{m} \pm \frac{2c}{m} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \omega_{01}^2 = \frac{6c}{m} \Rightarrow f_{01} = \ldots \\ \rightarrow \omega_{02}^2 = \frac{2c}{m} \Rightarrow f_{02} = \ldots \end{array} \Bigg\} \text{ wie oben}$$

Bem.: möglich wäre auch noch die „entkoppelten" Gleichungen aus der darüber stehenden Matrizengleichung zu verwenden → aus den Eigenvektoren müsste sich auch die Schwingformen ergeben